Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

I Giochi di Archimede

Soluzioni della Gara Triennio (versione T1)

21 novembre 2019

(1) La risposta corretta è (B).
Poiché in un triangolo il prodotto di ogni lato con la relativa altezza è lo stesso (vale a dire il doppio dell'area), si ha che l'altezza relativa al lato più corto deve essere quella più lunga e viceversa. L'ordinamento corretto è pertanto si ha $d < f < e$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(2) La risposta corretta è (A).
Indicati con p il prezzo effettivo del maglione (senza IVA) e con p' il prezzo con IVA al 22%, si ha che $p' = p + \frac{22}{100}\,p = \frac{122}{100}\,p$, vale a dire che $p = \frac{100}{122}\,p'$. Il prezzo con IVA al 25% risulta dunque essere $p'' = p + \frac{25}{100}\,p = \frac{125}{100}\,p = \frac{125}{100} \cdot \frac{100}{122}\,p' = \frac{125}{122}\,p'$. Dato che $p' = 61$€, si ricava che $p'' = 62{,}50$€.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(3) La risposta corretta è (C).
Detto m il numero di mattonelle, dal testo segue che $m-1$ deve essere multiplo di 3, di 4, di 5 e di 6. Pertanto $m-1$ deve essere multiplo del minimo comune multiplo di tali numeri, ovvero 60. Perciò deve essere $m - 1 = 60k$, con k intero positivo, ossia $m = 60k + 1$. Tra le risposte indicate, solo 301 è di questo tipo.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(4) La risposta corretta è (E).
Indicando con a e b il numero di monete, rispettivamente, del primo e del secondo, il testo del problema dice che valgono le uguaglianze $b - 3 = a + 3$ e $b + 1 = 3(a - 1)$. Di qui, $b = a + 6$ e $a + 7 = 3(a - 1)$, da cui $2a = 10$, ossia $a = 5$ e $b = 11$. In tutto, i due hanno $5 + 11 = 16$ monete.
Quesito proposto da A. Dal Zotto, S. Pelizzola, R. Zanotto.

(5) La risposta corretta è (E).
Poiché l'espressione è la somma di due quadrati, essa si annulla se e solo se entrambe le quantità sono nulle. Ne segue che $y = \frac{3}{4}$ e $6x - \frac{15}{4} = 0$, ossia $x = \frac{5}{8}$. Quindi $x + y = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(6) La risposta corretta è (D).
Fattorizziamo: $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Tenendo conto che il prodotto di MCD e mcm deve essere ancora uguale a 2160 e che, inoltre, il MCD è sempre un divisore del mcm, giungiamo alla conclusione che il MCD deve essere 3.
Infatti, dovendo essere dispari e maggiore di 1, esso deve essere o 5 o 3^k (con $1 \leq k \leq 3$), o $5 \cdot 3^k$ (con $1 \leq k \leq 3$). Ma, se 5 dividesse il MCD, allora 5 dividerebbe anche il mcm e dunque 25 dovrebbe essere un divisore di 2160, assurdo. Analogamente, se 3^2 dividesse il MCD, allora 3^4 dividerebbe 2160, assurdo. Se ne ricava che il MCD dei due numeri è appunto 3.
Il mcm sarà pertanto $2160 : 3 = 720$.
Quesito proposto da Matteo Protopapa.

(7) La risposta corretta è (C).
Intanto si può osservare che, dal momento che un poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza, il fatto che vi sia un angolo retto implica che l'ipotenusa del triangolo debba essere un diametro di tale circonferenza. Quindi il poligono regolare dovrà avere un numero di lati pari.
Gl altri due angoli del triangolo misurano $54°$ e $36°$: considerata la circonferenza circoscritta al poligono, gli angoli al centro corrispondenti agli archi sottesi a tali angoli misurano $108°$ e $72°$. Tali archi sono suddivisi in parti uguali dai vertici del poligono, perciò gli angoli al centro corrispondenti ai lati del poligono regolare devono avere per ampiezza un sottomultiplo di $108°$ e $72°$, dunque un sottomultiplo del loro MCD, ossia $36°$.
Pertanto il numero di lati deve essere multiplo di 10. Tra le risposte indicate, solo 30 lo è.
Quesito proposto da Maria Chiara Ricciuti.

(8) La risposta corretta è (B).
Per ciascun angolo interno retto, anche l'angolo esterno (che è il suo supplementare) è retto. Poiché in qualsiasi poligono convesso la somma degli angoli esterni è pari a un angolo giro, segue che non possono esserci più di 3 angoli retti (a meno che non si tratti di un rettangolo, cosa da escludere nel caso attuale). D'altra parte, non è difficile costruire esplicitamente poligoni convessi con 10 lati aventi precisamente 3 angoli retti.
Quesito proposto da Carlo Cassola.

(9) La risposta corretta è (D).
Un quadrato perfetto è multiplo di 7 se e solo se esso è della forma $(7n)^2 = 49n^2$, dove n è un numero intero. Per avere $49n^2 \leq 6000$, occorre che sia $n \leq 11$. I numeri cercati sono dunque 11, quelli ottenuti con l'espressione $49n^2$ per $1 \leq n \leq 11$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(10) La risposta corretta è (E).
Essendo retto l'angolo in A, la diagonale BD è un diametro e anche l'angolo in C deve essere retto. Per il teorema di Pitagora nel triangolo BCD, si ha che $\overline{BD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. Quindi, per il teorema di Pitagora nel triangolo BAD, si ha $\overline{DA} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.
Quesito proposto da Carlo Cassola.

(11) La risposta corretta è (C).
Se il punteggio realizzato dal dado speciale è 3, non è possibile che la somma dei due punteggi sia 10. Se invece il punteggio del dado speciale è 4 o 6, esiste esattamente 1 punteggio su 6 del dado normale per cui la somma dei due punteggi fa 8. Dato che la probabilità di realizzare 4 o 6 con il dado speciale è $\frac{4}{6}$, la probabilità che la somma sia 10 è quindi $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.
Quesito proposto da Sandro Campigotto.

(12) La risposta corretta è (A).
Detto T il piede della perpendicolare da R su PQ, dai dati del problema discende che i triangoli rettangoli KSR e QTR sono simili ed i lati di quest'ultimo misurano il doppio dei lati del primo. Perciò $\overline{TQ} = 2\,\overline{KS} = 2 \cdot (\overline{PS} - \overline{PK}) = 2 \cdot (\frac{62}{5} - 8) = \frac{44}{5}$.
Se ne ricava che $\overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ} = \frac{31}{5} + \frac{44}{5} = 15$.
Con il teorema di Pitagora, si conclude che $\overline{KQ} = \sqrt{\overline{PK}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.
Quesito proposto da Camilla Casamento Tumeo.

(13) La risposta corretta è (D).
Scorrendo la panchina da destra a sinistra, contiamo quante sono le possibili disposizioni dei seguenti 4 *blocchi*: la coppia Romeo e Giulietta (RG), la coppia Elena e Paride (EP), Achille (A), Ulisse (U), inizialmente senza badare a quale sia l'ordine con cui compaiono le persone all'interno delle due coppie.
I 4 *blocchi* possono essere disposti in $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi: infatti ci sono 4 possibilità di scelta per il *blocco* al primo posto, 3 possibilità per il *blocco* al secondo posto e 2 possibilità per il *blocco* al terzo posto (quello all'ultimo posto è poi forzato).
Per ciascuna disposizione dei 4 *blocchi* suddetti, ci sono 2 ordinamenti possibili per la coppia (RG) e 2 ordinamenti possibili per la coppia (EP), che si possono combinare in $2 \cdot 2 = 4$ modi possibili.
In conclusione, il numero complessivo di disposizioni che rispettano le condizioni indicate è uguale a $24 \cdot 4 = 96$.
Quesito proposto da Paolo Negrini.

(14) La risposta corretta è (E).
Le possibili scelte di 2 hashtag sono in tutto $1 + \frac{9 \cdot 8}{2} = 37$ (rispettivamente: le coppie di hashtag dove compare #ItaMO e quelle dove non compare).
Le possibili scelte di 3 hashtag sono in tutto $8 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 92$ (rispettivamente: le terne di hashtag dove compare #ItaMO e quelle dove non compare).
Nel complesso, l'insieme di hashtag può essere scelto in $37 + 92 = 129$ modi.
Quesito proposto da Riccardo Zanotto.

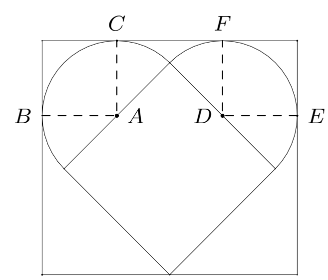
(15) La risposta corretta è (B).
Indichiamo le 10 persone con i numeri interi da 1 a 10, dove 1 è la persona che ha parlato per prima, 2 è quella che ha parlato per seconda, e così via.
La persona 1 afferma che 2 è cavaliere e lo stesso fa 2 riguardo 1: questo significa che, se uno di loro è cavaliere, lo sono entrambi. Perciò la coppia 1, 2 è formata o da due cavalieri o da due furfanti. La stessa cosa vale per la coppia 3, 4, per la coppia 5, 6, per la coppia 7, 8 e per la coppia 9, 10.
Si può inoltre osservare che, se una di queste coppie è formata da due cavalieri, allora le due coppie ad essa adiacenti devono essere formate entrambe da furfanti, dato che ciascuno dei due cavalieri dichiara che il proprio vicino fuori dalla coppia è furfante.
Viceversa, le coppie vicine ad una coppia di furfanti possono essere formate sia da cavalieri che da furfanti (le affermazioni della suddetta coppia sono in ogni caso false per aver dichiarato che l'altro elemento della coppia di furfanti è un cavaliere).
Si vede quindi che o le 10 persone sono tutti furfanti (in tal caso, infatti, tutte le affermazioni risulterebbero false), oppure potrebbero esserci 1 o al massimo 2 coppie di cavalieri, ma non di più: se ci fossero 3 coppie di cavalieri, almeno 2 di tali coppie dovrebbero sedere vicine, il che non è ammissibile per quanto detto sopra.
Quesito proposto da Andrea Ciprietti e Maria Chiara Ricciuti.

(16) La risposta corretta è (A).
Il triangolo $A'B'C'$ è equilatero per evidenti ragioni di simmetria (o, se si preferisce, osservando la congruenza dei triangoli $A'B'A$, $B'C'B$, $C'A'C$).
Detta D la proiezione ortogonale di A' sulla retta AB, il triangolo rettangolo ADA' ha angoli acuti di $30°$ e $60°$: infatti $\widehat{A'AD} = 180° - (\widehat{BAC} + \widehat{CAC'}) = 30°$. Ne consegue che $\overline{A'D} = \frac{1}{2}$ e che $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui si ottiene che $\overline{A'E} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e $\overline{B'E} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, dove E è la proiezione ortogonale di A' sulla retta $A''B'$.
Per il teorema di Pitagora, si ha dunque $\overline{A'B'}^{\,2} = (\frac{3}{2})^2 + (\frac{2+\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{16+4\sqrt{3}}{4} = 4 + \sqrt{3}$, da cui si conclude che $\overline{A'B'} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}$.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(17) La risposta corretta è (D).
Considerato che $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, vediamo quali possono essere i punteggi ottenuti nei diversi dadi affinché il loro prodotto sia 24 (senza badare all'ordine):
- caso a: possono essere 2, 2, 2, 3;
- caso b: possono essere 1, 2, 4, 3;
- caso c: possono essere 1, 2, 2, 6;
- caso d: possono essere 1, 1, 4, 6.

Contiamo quanti sono gli esiti dei lanci che rientrano in ognuno dei 4 gruppi di esiti elencati sopra. Nel conteggio, converrà tenere conto dell'ordine dei punteggi, ad esempio immaginando che i dadi siano di 4 colori diversi e considerando uguali due esiti se e solo se in colori uguali si presentano punteggi uguali.
Nel gruppo a, ci sono 4 esiti (si tratta di scegliere in quale dado esce il 3).
Nel gruppo b, ci sono $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ esiti (si tratta di scegliere quale dei 4 punteggi 1, 2, 3, 4 esce nel primo dado, quale dei 3 punteggi rimanenti esce nel secondo e quale dei 2 rimanenti esce nel terzo).
Nel gruppo c, ci sono $4 \cdot 3 = 12$ esiti (si tratta di assegnare uno dei 4 dadi al punteggio 6 e uno dei 3 dadi rimanenti al punteggio 1).
Nel gruppo d, ci sono 12 esisti, come in c.
Gli esiti favorevoli all'evento considerato sono pertanto $4 + 24 + 12 + 12 = 52$.
La probabilità richiesta è quindi $\frac{52}{6^4} = \frac{13}{324}$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

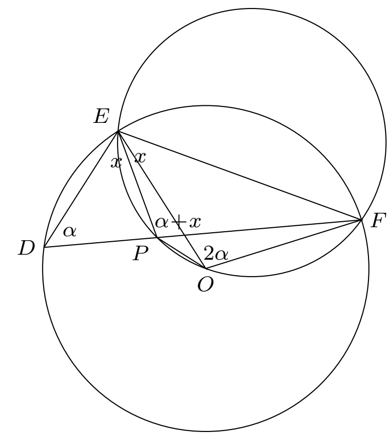
(18) La risposta corretta è (E).



La tangenza tra i lati del rettangolo e le semicirconferenze avviene nei punti B, C, F, E indicati in figura, nei quali i raggi sono paralleli a una delle diagonali del quadrato.
Tenuto conto che, in cm, $\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{AB} = \overline{DE} = \frac{1}{2}$, il lato orizzontale del rettangolo misura dunque $2\,\overline{AB} + \overline{AD} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.
Il lato verticale del rettangolo è invece pari ai 3/4 della diagonale del quadrato più $\overline{AC}$ (che è $\frac{1}{2}$), vale a dire: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{2+3\sqrt{2}}{4}$.
L'area del rettangolo in cm^2 è pertanto $\frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2+3\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{4} + \sqrt{2}$.
Quesito proposto da Andrea Gallese.

(19) La risposta corretta è (C).
Osserviamo prima di tutto che la (B) è chiaramente vera: il numero di buchi ed il numero di sporgenze sono uguali (poiché per ogni buco c'è una e una sola sporgenza) ed il loro numero coincide con il numero di lati interni al puzzle completato, identificando come uno solo i lati di due pezzi che vengono a combaciare. Tale numero, indicando con n il numero di pezzi disposti lungo ciascun lato, è uguale a $N = \frac{4n^2-4n}{2} = 2n(n-1)$.
Vediamo ora le altre affermazioni.
La (A) è vera: il numero complessivo di pezzi n^2 è multiplo di 21 se e solo se n contiene come fattori 3 e 7; in tal caso anche N, che è multiplo di n, sarà multiplo di 21.
Anche la (D) è vera: infatti nel numero $N = 2n(n-1)$ uno tra i due fattori n e $n-1$ deve essere pari, essendo interi consecutivi, dunque N è senz'altro multiplo di 4.
Parimenti è vera la (E): i pezzi senza lati piatti sono quelli che non si affacciano sul bordo del puzzle ed il loro numero è $(n-2)^2$; se il numero complessivo di pezzi n^2 è dispari, anche n è dispari ed anche $n-2$ e $(n-2)^2$ lo sono.
Vediamo infine che la (C) è invece falsa. Basta prendere ad esempio $n = 5$: in tal caso, il numero di pezzi è 25, mentre $N = 40$.
Quesito proposto da Andrea Barbarino.

(20) La risposta corretta è (A).
Poniamo $\widehat{EDF} = \alpha$ e $\widehat{DEP} = \widehat{PEF} = x$.
Per il teorema dell'angolo esterno (applicato al triangolo DEP), si ha $\widehat{EPF} = \widehat{EDP} + \widehat{DEP} = \alpha + x$. Inoltre, considerando la circonferenza circoscritta al quadrilatero $FEPO$, si ha che $\widehat{EPF} = \widehat{EOF}$, essendo angoli alla circonferenza che insistono entrambi sull'arco EF. Per il teorema dell'angolo al centro (applicato alla circonferenza circoscritta a DEF), si ha $2\,\widehat{EDF} = \widehat{EOF}$, vale a dire $2\alpha = \alpha + x$, ovvero $x = \alpha$.
Pertanto $\widehat{DEF} = 2\alpha$ e, considerando il triangolo DEF, si conclude che l'angolo $\widehat{DFE}$ è il supplementare di 3α. Dato che $\alpha = 52°$, si ricava che $\widehat{DFE} = 180° - 3 \cdot 52° = 24°$.
Quesito proposto da Camilla Casamento Tumeo.



Come ogni anno, i problemi proposti per i Giochi di Archimede sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili, sono da individuarsi esclusivamente nei curatori della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte. A tutti loro, ed anche a chi ha contribuito con quesiti che non sono stati inclusi nel testo della gara, va il nostro ringraziamento per la varietà, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede
Paolo Francini, Andrea Sambusetti