

*I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio*

18 novembre 2009

## Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	B
2	C
3	A
4	C
5	A
6	B
7	C
8	C
9	A
10	B
11	C
12	B
13	D

Problema	Risposta corretta
14	C
15	A
16	A
17	A
18	B
19	D
20	D
21	B
22	D
23	B
24	B
25	A

## Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(B)**.

Osserviamo che  $45 = 3^2 \cdot 5$  divide certamente  $N = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$ . Notiamo anche che 42 non è un divisore di  $N$  perchè è un multiplo di 7 mentre  $N$  non è divisibile per 7; lo stesso vale per  $105 = 7 \cdot 15$ . Analogamente: 52 è un multiplo di 13, 85 è un multiplo di 17, e sia 13 che 17 non dividono  $N$ , perchè sono numeri primi che non figurano nella scomposizione di  $N$  in fattori primi.

[Problema proposto da A. Colesanti.]

2. La risposta è **(C)**.

Durante la gita in bicicletta la ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha percorso  $2 \cdot \pi \cdot 28 \cdot 10000$  cm. La stessa lunghezza deve essere stata percorsa dalla ruota posteriore; quindi se indichiamo con  $N$  il numero dei giri fatti dalla ruota posteriore, deve valere l'uguaglianza:

$$2 \cdot \pi \cdot 28 \cdot 10000 = 2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot N$$

da cui si ricava facilmente  $N = 17500$ .

[Problema proposto da A. Colesanti.]

3. La risposta è **(A)**.

Ogni anno venusiano la somma delle età dei figli di Eva aumenta di 153 anni, mentre quella dei

figli di Greta aumenta di 180 anni; quindi ogni anno venusiano la differenza tra le due somme diminuisce di  $180 - 153 = 27$  anni. Per colmare e superare la differenza dell'anno 33, di 100 anni, occorrono quindi quattro anni. Concludiamo che l'anno venusiano in cui la somma delle età dei figli di Greta supererà quella dei figli di Eva è il 37.

[Problema proposto da A. Colesanti.]

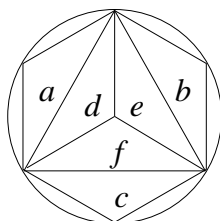
4. La risposta è **(C)**.

Cominciamo con l'osservare che la pulce torna sul 12 dopo un numero  $s$  di salti se e solo se  $s \cdot n$  è multiplo di 12. Se  $n$  e 12 avessero un divisore comune  $d$ , allora in  $\frac{12}{d} < 12$  salti la pulce percorrerebbe  $n \frac{12}{d} = 12 \frac{n}{d}$  ore, quindi tornerebbe sul 12. Poiché questo non può succedere,  $n$  e 12 devono essere primi tra loro. D'altra parte, se  $n$  e 12 sono primi tra loro, il più piccolo multiplo di  $n$  che sia anche multiplo di 12 è  $12n$  (minimo comune multiplo tra  $n$  e 12), quindi la pulce non torna sul 12 prima di 12 salti. Concludiamo che la pulce può aver scelto  $n$  se e solo se  $n$  e 12 sono primi fra loro, ossia gli  $n$  accettabili sono i seguenti quattro numeri: 1, 5, 7, 11.

[Problema proposto da K. Kuzmin.]

5. La risposta è **(A)**.

Come indicato nella figura, possiamo disegnare il triangolo e l'esagono in modo che abbiano tre vertici in comune.



In questo modo si nota che l'esagono è formato dal triangolo a cui si uniscono tre triangoli isosceli  $a$ ,  $b$  e  $c$ , con base i lati del triangolo e un vertice sulla circonferenza. Inoltre, se si uniscono i vertici del triangolo equilatero con il centro della circonferenza lo si scompone in tre triangoli  $d$ ,  $e$  e  $f$  congruenti a  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Dunque l'esagono ha area doppia rispetto al triangolo e il rapporto richiesto è  $1/2$ .

[Problema proposto da R. Morandin.]

6. La risposta è **(B)**.

Chiamiamo  $N$  il numero degli studenti della scuola, che è lo stesso sia per quest'anno che per l'anno scorso. Alla fine dello scorso anno hanno lasciato la scuola complessivamente il 21% degli studenti (la somma dei diplomati e di quelli che si sono trasferiti). Quest'anno sono arrivati 84 studenti nuovi. Poiché il numero complessivo di studenti è rimasto invariato, deduciamo che il 21% di  $N$  è pari a 84. Quindi, l'1% degli studenti è  $84/21 = 4$  e  $N$  vale 400.

[Problema proposto da F. Mugelli.]

7. La risposta è **(C)**.

Se scomponiamo 1600 in fattori primi troviamo

$$1600 = 2^6 \cdot 5^2.$$

Dunque i divisori di 1600 sono i numeri che si scrivono nella forma

$$2^p \cdot 5^q,$$

con  $p$  numero intero compreso tra 0 e 6, estremi inclusi, e  $q$  numero intero compreso tra 0 e 2, estremi inclusi. Tra questi, sono quadrati perfetti quelli per cui: (1)  $p$  e  $q$  sono entrambi pari; (2) uno dei due è pari e l'altro è zero; (3) sono entrambi uguali a zero. Quindi i quadrati perfetti che dividono 1600 sono:

$$2^0 \cdot 5^0 = 1, 2^2 \cdot 5^0 = 4, 2^4 \cdot 5^0 = 16, 2^6 \cdot 5^0 = 64, \\ 2^0 \cdot 5^2 = 25, 2^2 \cdot 5^2 = 100, 2^4 \cdot 5^2 = 400, 2^6 \cdot 5^2 = 1600,$$

ovvero 8 in tutto.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

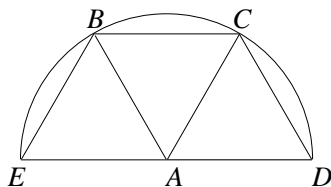
8. La risposta è **(C)**.

Consideriamo un numero di due cifre compreso tra 10 e 99 (estremi inclusi), che non abbia come seconda cifra 0. Chiamiamo  $D$  la cifra delle decine e  $U$  la cifra delle unità di questo numero. In corrispondenza di questo numero Rita scrive sul foglio il numero  $D - U$ . Se le due cifre sono uguali, allora  $D - U = 0$ . Se invece le due cifre sono diverse, il numero che ha le cifre scambiate, ovvero  $U$  come cifra delle decine e  $D$  come cifra delle unità è compreso tra 10 e 99 ed in corrispondenza di questo numero Rita scrive  $U - D$ , ovvero l'opposto del numero di prima. I due numeri  $D - U$  e  $U - D$  scritti da Rita sul foglio e sommati daranno un contributo nullo alla somma finale. Quindi per fare la somma richiesta possiamo considerare solo i multipli di dieci compresi tra 10 e 90. È facile calcolare che la somma dei contributi dati da questi numeri è 45.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

9. La risposta è **(A)**.

Supponiamo che il rombo ruoti in senso antiorario. Disegniamo la semicirconferenza  $\mathcal{C}$  con centro  $A$ , passante per  $B$ ,  $C$  e  $D$ , come indicato nella figura, e indichiamo con  $E$  il punto diametralmente opposto a  $D$  su  $\mathcal{C}$ . Durante la rotazione ciascuno dei vertici  $B$ ,  $C$  e  $D$  si muove su  $\mathcal{C}$ . Inoltre, poichè la rotazione è di  $60^\circ$ , il vertice  $D$  va in  $C$ , il vertice  $C$  va in  $B$  e il vertice  $B$  va in  $E$ .



Complessivamente il rombo copre, durante la rotazione, la parte racchiusa dalla semicirconferenza e dal diametro  $DE$ , ovvero metà di un cerchio di raggio 1 m, la cui area è  $\frac{\pi}{2} \text{ m}^2$ .

[Problema proposto da A. Sambusetti.]

10. La risposta è **(B)**.

Chiamiamo  $F$  il numero delle femmine che ci sono nella classe. Il voto medio della classe è dato dalla somma di tutti i voti diviso il numero di tutti gli studenti della classe. La somma dei voti dei maschi è pari al loro numero moltiplicato per il loro voto medio:  $10 \cdot 6,5 = 65$ . Analogamente, la somma dei voti presi dalle femmine è  $8F$ . Quindi possiamo scrivere:

$$\text{voto medio della classe} = \frac{65 + 8F}{10 + F} = 7.$$

Da cui si ricava  $F = 5$ .

[Problema proposto da P. Negrini.]

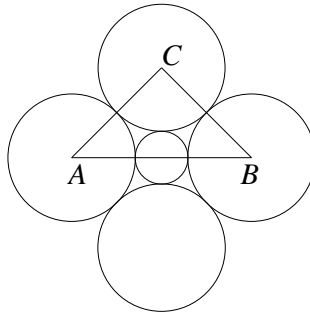
11. La risposta è **(C)**.

Ludovico afferma di essere un furfante. Questa affermazione non può essere fatta né da un furfante, perché affermerebbe il vero, né da un cavaliere, perché mentirebbe. Quindi Ludovico è un paggio, la sua seconda affermazione è falsa e allora la prima è vera, cioè Orlando è un paggio. Allora la prima affermazione di Orlando è vera e quindi la seconda è falsa, ovvero i tre non sono tutti paggi. D'altra parte, visto che Ludovico e Orlando lo sono, questo vuol semplicemente dire che Drago non è un paggio. In conclusione, i paggi sono due: Ludovico e Orlando.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

12. La risposta è **(B)**.

Chiamiamo  $r$  e  $R$  rispettivamente i raggi della moneta d'oro e delle monete d'argento. Facendo riferimento alla figura riportata sotto, in cui sono disegnate le cinque monete, osserviamo che il triangolo  $ABC$  è rettangolo (nel vertice  $C$ ) e isoscele. Inoltre l'ipotenusa  $AB$  ha lunghezza  $2(R + r)$  mentre i cateti  $AC$  e  $BC$  hanno lunghezza  $2R$ .



Quindi  $2(R + r) = 2\sqrt{2}R$  da cui  $R + r = \sqrt{2}R$ . Dividendo entrambi i termini per  $R$  si ottiene

$$1 + \frac{r}{R} = \sqrt{2}.$$

da cui segue  $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$ .

[Problema proposto da K. Kuzmin.]

13. La risposta è **(D)**.

Poiché  $a \geq 0$ , abbiamo  $a^3 + a \geq 0$  e quindi dalla disuguaglianza del problema segue che  $b - b^3 > 0$ . D'altra parte  $b - b^3 = b(1 - b^2)$  e affinché questa quantità sia strettamente positiva (tenendo conto che  $b \geq 0$ ) deve valere sia  $b > 0$  che  $b < 1$ . Osserviamo inoltre che, essendo  $a \geq 0$ , deve valere  $a + a^3 \geq a$  e, essendo  $b > 0$  (come provato sopra) deve valere  $b - b^3 < b$ . Quindi dalla disuguaglianza  $a + a^3 \leq b - b^3$  segue che  $a < b$ . Abbiamo così provato  $a < b < 1$ .

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

14. La risposta è **(C)**.

Le disposizioni possibili di maiuscole e minuscole nella password sono 6:

$$MMmm, mmMM, MmMm, mMmM, mMMm, MmmM,$$

dove  $M$  indica una lettera maiuscola e  $m$  indica una lettera minuscola. Per ciascuna di queste disposizioni, ciascuna delle 4 lettere può assumere 5 valori distinti, quindi ogni disposizione dà luogo a  $5^4$  possibilità. Di conseguenza ci sono  $6 \cdot 5^4$  possibili password che rispondono alle

caratteristiche richieste. Questo è il numero massimo di password che Carla deve provare prima di accendere il computer.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

15. La risposta è **(A)**.

L'osservazione di partenza è che  $1024 = 2^{10}$  e quindi i suoi divisori sono le potenze di 2, da quella di esponente 0, cioè 1, a quella di esponente 10, cioè 1024 stesso. Quindi i numeri scritti alla lavagna possono essere solo tra questi. D'altra parte la somma di tali numeri è 83, da cui segue che i numeri scritti alla lavagna possono essere solo: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Osserviamo ora che 83 è dispari, quindi 1 deve necessariamente essere uno dei numeri scritti sulla lavagna, infatti qualsiasi numero ottenuto come somma di 2, 4, 8, 16, 32 e 64 è pari. Quindi il più piccolo numero scritto sulla lavagna è 1. Infine, una possibilità è che i numeri scritti sulla lavagna siano: 1, 1, 1, 16, 64.

[Problema proposto da M. Mamino.]

16. La risposta è **(A)**.

Consideriamo i numeri di quattro cifre composti dalle cifre 1, 2, 3 e 6, in cui la prima cifra è 1. Questi sono sei:

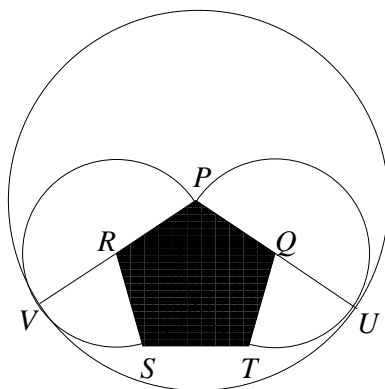
$$1236, 1263, 1326, 1362, 1623, 1632.$$

Analogamente, ci sono sei numeri in cui la prima cifra è 2, sei in cui è 3 e sei in cui è 6. Questo succede per tutte le quattro cifre dei numeri in questione. Supponiamo ora di mettere tutti i numeri del tipo descritto dal problema in colonna e di sommarli. Nella colonna delle unità sommiamo sei volte 1, sei volte 2, sei volte 3 e sei volte 6, ottenendo così 72. Scriviamo 2 come ultima cifra della somma e aggiungiamo 7 alla somma delle cifre delle decine. Questa somma fa allora  $72 + 7 = 79$ . Scriviamo 9 come cifra delle decine della somma e riportiamo di nuovo 7 nella colonna delle centinaia. Quindi anche in questa colonna la somma è 79 e la cifra delle centinaia della somma è 9 con un riporto di 7 alla colonna delle migliaia. In questa colonna, che è l'ultima da considerare, la somma è ancora 79. In conclusione la somma è 79992.

[Problema proposto da F. Mugelli.]

17. La risposta è **(A)**.

Nella figura riportata sotto  $P$  indica il portone del palazzo e sono state tracciate la circonferenza di centro  $P$  e raggio doppio del lato del pentagono, e le due circonferenze di centri  $P$  e  $Q$  di raggio pari al lato del pentagono.



Golia può aver lasciato la fionda in un punto qualsiasi del settore circolare della circonferenza centrata in  $P$ , delimitato dai raggi  $PV$  e  $PU$  e non contenente il pentagono. Gli angoli interni di un pentagono regolare misurano  $108^\circ$ , quindi l'angolo al centro del settore circolare a cui

siamo interessati misura  $252^\circ$  ovvero i  $7/10$  di un angolo giro. Quindi l'area del settore circolare è

$$\frac{7}{10}\pi 400 \text{ m}^2 = 280\pi \text{ m}^2.$$

D'altra parte Golia può aver percorso per 10 m uno dei lati del palazzo che partono da  $P$ , ad esempio  $PQ$ , e poi essersi allontanato da  $Q$ , al massimo di altri dieci metri, in una qualsiasi direzione consentita dalla presenza del palazzo. Quindi Golia può aver raggiunto uno qualsiasi dei punti dei settori circolari di centro  $Q$  e  $R$ , raggio 10 m e delimitati dai segmenti  $QT$ ,  $QU$  e  $RS$ ,  $RV$  rispettivamente. Gli angoli al centro di questi due settori sono complementari agli angoli interni del pentagono e quindi sono di  $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ , cioè  $1/5$  dell'angolo giro. Quindi l'area di ciascuno di questi due settori è

$$\frac{1}{5}\pi 100 \text{ m}^2 = 20\pi \text{ m}^2.$$

Complessivamente la superficie che Davide deve esplorare, al massimo, ha un'area di

$$(280 + 20 + 20)\pi \text{ m}^2 = 320\pi \text{ m}^2.$$

[Problema proposto da D. Lombardo.]

18. La risposta è **(B)**.

Se sviluppiamo il prodotto in questione, otteniamo

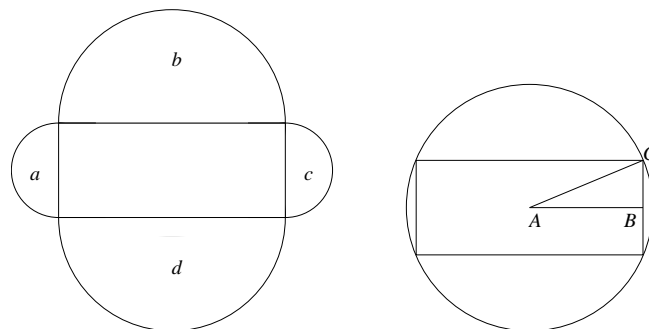
$$(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10 + 1) = 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1,$$

un numero di 7 cifre, tutte uguali a 1.

[Proposto da F. Poloni.]

19. La risposta è **(D)**.

Possiamo ottenere l'area richiesta per differenza, considerando l'area della figura che si ottiene unendo al rettangolo i quattro semicerchi costruiti sui lati e sottraendo all'area di questa figura l'area del cerchio in cui il rettangolo è inscritto.



L'area del rettangolo è  $60 \text{ cm}^2$ . Facendo riferimento alla figura sopra a sinistra, l'area di ciascuno dei due semicerchi  $a$  e  $c$  è  $\frac{25}{8}\pi \text{ cm}^2$  mentre l'area di ciascuno dei due semicerchi  $b$  e  $d$  è  $18\pi \text{ cm}^2$ . Quindi l'area complessiva della prima figura è:  $(60 + \frac{25}{4}\pi + 36\pi)\text{cm}^2$ . Il raggio  $R$  del cerchio in cui il rettangolo è inscritto può essere trovato con il Teorema di Pitagora applicato al rettangolo  $ABC$  nella figura di destra. Si trova così

$$r = \left( \sqrt{\frac{25}{4} + 36} \right) \text{ cm}.$$

Quindi l'area del cerchio in cui è inscritto il rettangolo è

$$\left(\frac{25}{4}\pi + 36\pi\right) \text{ cm}^2.$$

Facendo la differenza delle aree delle due figure si trova che l'area richiesta dal problema è  $60 \text{ cm}^2$ .

[Problema proposto da D. Lombardo.]

20. La risposta è **(D)**.

La cifra delle unità del prodotto di due numeri che finiscono per 6 è 6. Quindi, la cifra delle unità di  $66^{66} = 66 \times 66 \times \dots \times 66$  è 6 e la cifra delle unità della sua metà può essere 3 o 8. Chiaramente  $\frac{66^{66}}{2} = 33 \times 66^{65}$  è pari, quindi la sua cifra delle unità non può essere 3, e deve essere 8.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

21. La risposta è **(B)**.

Il numero  $n$  deve essere primo quindi può essere uguale a 2 oppure deve essere un numero dispari. Consideriamo prima il caso  $n = 2$ ; in questo caso  $(n - 6)^2 + 1 = 17$ , che è primo. Quindi  $n = 2$  fornisce una soluzione. Consideriamo ora il caso in cui  $n$  sia dispari. Osserviamo che  $(n - 6)$  è ancora dispari e quindi  $(n - 6)^2$  è ancora dispari per cui  $(n - 6)^2 + 1$  è pari e, dovendo essere primo, deve essere uguale a 2. Quindi dobbiamo avere:  $(n - 6)^2 + 1 = 2$  da cui  $(n - 6)^2 = 1$  che equivale a  $n - 6 = \pm 1$ . Otteniamo così i due valori  $n = 7$  e  $n = 5$  entrambi accettabili in quanto anch'essi primi. In tutto ci sono allora tre possibili  $n$  che verificano le proprietà richieste.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

22. La risposta è **(D)**.

Chiamiamo  $A$ ,  $B$  e  $C$  il numero di cubi di lato 3 cm, 4 cm e 5 cm rispettivamente.  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono numeri interi strettamente positivi che soddisfano due relazioni:

$$A + B + C = 10, \quad 27A + 64B + 125C = 577.$$

La seconda si ottiene imponendo che la somma dei volumi dei cubi sia  $577 \text{ cm}^3$ . Dalla prima equazione si ottiene  $A = 10 - (B + C)$  e sostituendo questa uguaglianza nella seconda equazione si ha:

$$270 - 27B - 27C + 64B + 125C = 577 \quad \Rightarrow \quad 37B + 98C = 307.$$

Dall'ultima uguaglianza segue che  $C$  non può essere maggiore di 2. Infatti se fosse  $C \geq 3$ ,  $B$  dovrebbe essere strettamente minore di 1, il che è impossibile. Quindi i possibili valori di  $C$  sono 1 e 2. Per  $C = 1$  abbiamo  $B = \frac{209}{37}$  che non è intero, quindi il valore  $C = 1$  non è accettabile. Per  $C = 2$  abbiamo  $B = \frac{111}{37} = 3$ . Dunque deve necessariamente essere  $C = 2$ ,  $B = 3$  e di conseguenza  $A = 5$ .

[Problema proposto da R. Morandin.]

23. La risposta è **(B)**.

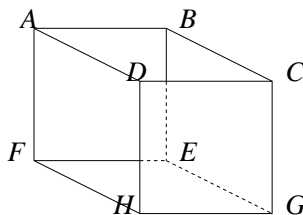
Le affermazioni di Anna e Bea sono in contraddizione tra loro. Infatti se Anna ha un poker deve avere almeno una carta di cuori e quindi Bea non può avere tutte le cinque carte di cuori. Quindi una tra Anna e Bea mente. Se fosse Anna a mentire, le affermazioni di Bea, Caio e Dino dovrebbero essere tutte vere. D'altra parte Dino afferma di avere tre carte dello stesso valore, quindi in particolare ha una carta rossa, ma Bea ha tutte le carte di cuori e di conseguenza Caio, che ha cinque carte rosse, deve avere tutte le carte di quadri. Quindi l'affermazione di

Dino è in contrasto con quelle di Bea e Caio. Deduciamo che Bea, Caio e Dino non stanno dicendo tutti la verità, quindi Anna afferma il vero e Bea mente. Concludiamo osservando che le affermazioni di Anna, Caio e Dino sono tra loro compatibili. Ad esempio: Anna potrebbe avere un poker di assi e il re di picche; Caio potrebbe avere il re di cuori, il re di quadri, la regina di cuori, la regina di quadri e il fante di cuori; Dino potrebbe avere il fante di quadri, il fante di picche e il fante di fiori, il dieci di cuori e il dieci di quadri e Bea le cinque carte rimanenti.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

24. La risposta è **(B)**.

Facciamo riferimento alla figura riportata qui sotto e supponiamo che la formica parta dal vertice  $A$ .



Un tipo di percorso che la formica può fare è percorrere inizialmente tre lati di una stessa faccia (di quelle a cui appartiene  $A$ ), passando da tutti e quattro i suoi vertici, poi spostarsi (necessariamente) su un vertice della faccia opposta, percorrerne tre lati passando anche da tutti i suoi vertici. Un percorso di questo tipo è dato dalla sequenza di vertici:

$$ABCDHGEF,$$

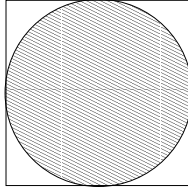
in cui prima vengono percorsi tre lati della faccia  $ABCD$  e poi i tre lati della faccia opposta:  $HGEF$ . Notiamo che ciascuna delle due facce può essere percorsa in due sensi distinti, quindi di percorsi di questo tipo, per ogni scelta delle due facce opposte, ce ne sono quattro. D'altra parte il vertice di partenza è comune a tre facce distinte, quindi abbiamo 12 percorsi di questo tipo. Una seconda possibilità è che la formica percorra inizialmente solo due lati di una stessa faccia, ad esempio la faccia  $ABCD$ , e poi si sposti su un vertice della faccia opposta, ad esempio supponiamo che l'inizio del percorso sia la sequenza:  $ABCG$ . A questo punto la formica deve passare ancora da tutti i vertici della faccia  $HGEF$ , eccettuato  $G$ , e deve passare per  $D$ . L'unica possibilità per fare questo e non passare due volte da uno stesso vertice è la sequenza di vertici:  $EFHD$ . Dunque abbiamo individuato il percorso  $ABCGEFHD$ . Un percorso analogo a questo, in cui i primi due vertici sono ancora della faccia  $ABCD$ , è:  $ADCGHFEB$ . Ovvero abbiamo due percorsi di questo secondo tipo se fissiamo la faccia a cui appartengono i primi due lati che la formica percorre. Tenendo nuovamente conto che il vertice iniziale è comune a tre facce, abbiamo sei percorsi del secondo tipo. In tutto abbiamo individuato  $12 + 6 = 18$  percorsi distinti. Osserviamo che non ce ne sono altri: infatti non esistono percorsi in cui i primi due lati percorsi non siano comuni ad una stessa faccia del cubo.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

25. La risposta è **(A)**.

Nel disegno è rappresentata una delle facce del cubo. La parte tratteggiata rappresenta la porzione della faccia interna alla sfera.





L'area della parte non tratteggiata è, per differenza,

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ m}^2 .$$

Complessivamente, la superficie della parte di cubo esterna alla sfera è data dall'area appena calcolata moltiplicata per il numero di facce del cubo, cioè sei. Il risultato è allora  $6 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ m}^2 = \left(6 - \frac{3}{2}\pi\right) \text{ m}^2$ .

[Problema proposto da K. Kuzmin.]