PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

18 novembre 2009

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Quale dei seguenti numeri è un divisore di $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
(A) 42, **(B)** 45, **(C)** 52, **(D)** 85, **(E)** 105.

2) La ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha il raggio di 28 cm, mentre la ruota posteriore ha il raggio di 16 cm. Al termine di una gita in bicicletta la ruota anteriore ha fatto 10000 giri; quanti ne ha fatti la ruota posteriore nella stessa gita?
(A) 12000, **(B)** 14500, **(C)** 17500, **(D)** 19000, **(E)** 21000.

3) Su Venere, nell'anno venusiano 33, Eva e Greta si incontrano ai giardini. Eva dice a Greta: "Io ho solo 153 figli, ma alla fine di quest'anno la somma delle loro età sarà maggiore di 100 anni della somma delle età dei tuoi figli, che pure sono 180!". Durante quale anno venusiano la somma delle età dei figli di Greta supererà quella dei figli di Eva?
(A) 37, **(B)** 38, **(C)** 39, **(D)** 40, **(E)** 41.

4) Una pulce si trova sul numero 12 del quadrante di un orologio. Sceglie un numero naturale n compreso tra 1 e 12, estremi inclusi, e comincia a fare salti di n numeri sul quadrante, in senso orario (se ad esempio $n = 3$, dopo il primo salto è sul 3, dopo il secondo è sul 6 e così via). Dopo 12 salti, per la prima volta si ritrova sul numero 12 del quadrante. In quanti modi distinti può aver scelto n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 12.

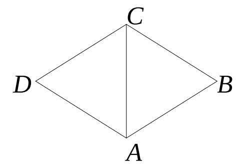
5) Disegno un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e quella dell'esagono?
(A) $\frac{1}{2}$, **(B)** $\frac{1}{3}$, **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{6}$.

6) Alla fine dell'anno scorso in una scuola si è diplomato il 18% degli studenti di tutta la scuola e un altro 3% degli studenti si è trasferito in altre scuole. Quest'anno si sono iscritti alla scuola 84 nuovi studenti e ora il numero di studenti è uguale a quello delle scorso anno. Quanti studenti ha la scuola?
(A) 324, **(B)** 400, **(C)** 500, **(D)** 525, **(E)** 600.

7) Quanti quadrati perfetti dividono 1600? [Un quadrato perfetto è un numero del tipo n^2, con n è un numero naturale. 1, 4, 9, 16, sono esempi di quadrati perfetti.]
(A) 2, **(B)** 4, **(C)** 8, **(D)** 10, **(E)** 12.

8) La piccola Rita fa questo gioco: per ogni numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, sottrae la cifra delle unità da quella delle decine e scrive il risultato su un foglio (ad esempio per 21 scrive 1, cioè $2 - 1$, mentre per 37 scrive -4, cioè $3 - 7$). Alla fine somma tutti i numeri che ha scritto sul foglio; quale risultato trova?
(A) 0, **(B)** -30, **(C)** 45, **(D)** -50, **(E)** 100.

9) Nel rombo in figura, i triangoli ABC e ACD sono equilateri ed hanno lato di lunghezza 1 m. Se ruotiamo il rombo di 60° rispetto al vertice A, qual è l'area della superficie coperta dal rombo nella rotazione?



(A) $\frac{\pi}{2}$ m^2, **(B)** 1 m^2, **(C)** π m^2, **(D)** $\frac{\pi}{3}$ m^2, **(E)** 2 m^2.

10) In una classe si è svolta una verifica di matematica e il voto medio è stato 7. Inoltre il voto medio dei maschi è stato 6,5 mentre quello delle femmine è stato 8. Se i maschi della classe sono 10, quante sono le femmine?
(A) 4, **(B)** 5, **(C)** 7, **(D)** 9, **(E)** 11.

11) La faccia nascosta della luna è popolata solo da furfanti, che mentono sempre, cavalieri che dicono sempre il vero, e paggi, che quando pronunciano due frasi consecutive, mentono su una e dicono il vero nell'altra, scegliendo in modo casuale l'ordine tra le due. Tre abitanti, Drago, Ludovico e Orlando, fanno le seguenti affermazioni. Drago: "Io sono un paggio. Ludovico è un cavaliere". Ludovico: "Orlando è un paggio. Io sono un furfante". Orlando: "Io sono un paggio. Siamo tutti paggi!". Quanti di loro sono effettivamente paggi?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** non si può determinare con i dati a disposizione.

12) Una moneta d'oro è circondata da quattro monete d'argento uguali tra loro. Ogni moneta d'argento è tangente alla moneta d'oro e a due monete d'argento. Trovare

il rapporto tra il raggio della moneta d'oro e quello delle monete d'argento.
(A) $\frac{1}{4}$, **(B)** $\sqrt{2}-1$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(E)** 1.

13) a e b sono due numeri maggiori o uguali a zero. Sappiamo che: $a^3 + a < b - b^3$. Qual è l'ordine corretto tra i tre numeri a, b e 1?
(A) $b < a < 1$, **(B)** $a = b = 1$, **(C)** $a < 1 < b$, **(D)** $a < b < 1$,
(E) $1 < a < b$.

14) Carla si è dimenticata la password di accensione del suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante password diverse deve provare Carla, al massimo, per accendere il computer?
(A) $3 \cdot 5^4$, **(B)** 5^5, **(C)** $6 \cdot 5^4$, **(D)** 5^6, **(E)** $3 \cdot 5^6$.

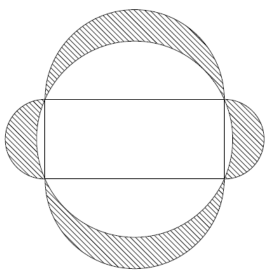
15) Sulla mia lavagna sono scritti alcuni numeri interi positivi, non necessariamente distinti. Se li sommo trovo 83, se li moltiplico trovo 1024. Qual è il più piccolo dei numeri scritti sulla mia lavagna?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 8, **(E)** 16.

16) Quale numero si ottiene sommando tutti i numeri formati da quattro cifre distinte, in cui ciascuna cifra può essere solo 1, 2, 3 oppure 6?
(A) 79992, **(B)** 13332, **(C)** 123456, **(D)** 100000, **(E)** 63210.

17) Davide e Golia abitano in un palazzo la cui pianta è un pentagono regolare di lato 10 metri. Il portone del palazzo è posto in uno dei vertici del pentagono e il palazzo è circondato, nel raggio di alcuni chilometri, da terreno piatto. Golia ruba la fionda di David, esce dal portone, percorre non più di 20 metri (senza rientrare nel palazzo) e lascia la fionda per terra. Quanto misura la superficie in cui David dovrà cercare, al massimo, prima di ritrovare la sua fionda?
(A) 320π m^2, **(B)** 160π m^2, **(C)** $100(4\pi - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ m^2,
(D) $100(2\pi + \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ m^2, **(E)** 280π m^2.

18) Qual è la seconda cifra, partendo da sinistra, del numero $(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

19) Disegniamo un rettangolo di lati 5 cm e 12 cm, la circonferenza in cui è inscritto e le semicirconferenze che hanno per diametro i lati del rettangolo e sono esterne ad esso, come indicato nella figura a fianco. Qual è l'area della parte ombreggiata?
(A) 45 cm^2, **(B)** 13π cm^2, **(C)** 19π cm^2,
(D) 60 cm^2, **(E)** 20π cm^2.



20) Qual è la cifra delle unità del numero: $\dfrac{66^{66}}{2}$?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 6, **(D)** 8, **(E)** 9.

21) Per quanti numeri naturali n, sia n che $(n-6)^2+1$ sono primi?
(A) 1, **(B)** 3, **(C)** 4, **(D)** 7, **(E)** più di 8.

22) Gabriele ha dieci cubi, di tre dimensioni: alcuni hanno lato di 3 cm, altri il lato di 4 cm e altri ancora hanno il lato di 5 cm (ne ha almeno uno di ciascun tipo). La somma dei volumi dei dieci cubi è 577 cm^3. Quanti sono i cubi con il lato di 3 cm?
(A) 2, **(B)** 3, **(C)** 4, **(D)** 5, **(E)** 6.

23) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa. Anna dice: "Io ho un poker!" (quattro carte dello stesso valore). Bea dice: "Io ho tutte e cinque le carte di cuori". Caio dice: "Io ho cinque carte rosse". Infine Dino dice: "Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno tra loro lo stesso valore". Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?
(A) Anna, **(B)** Bea, **(C)** Caio, **(D)** Dino, **(E)** non è possibile determinarlo.

24) Una formica si trova su un vertice di un cubo. Si muove percorrendo gli spigoli del cubo in modo da passare una e una sola volta da ciascun vertice del cubo. Quanti sono i possibili percorsi distinti che può seguire?
(A) 10, **(B)** 18, **(C)** 22, **(D)** 26, **(E)** 30.

25) Un cubo di lato 1 m e una sfera hanno lo stesso centro e la superficie della sfera passa per i punti medi di tutti i lati del cubo. Quanto misura l'area della superficie del cubo esterna alla sfera?
(A) $(6 - \frac{3\pi}{2})$ m^2, **(B)** $(8 - 2\pi)$ m^2, **(C)** $(6 - \frac{4\pi}{3})$ m^2, **(D)** $(12 - 3\pi)$ m^2,
(E) π m^2.